ICARE - SESSION 1999 - (4 heures)

(TSI - ATS) Mathématiques 1.

LES 3 EXERCICES SONT INDEPENDANTS.

I. On se propose d'étudier f $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$

I.1 Donner le domaine de définition de f, puis montrer que f est impaire.

I.2 Soit g la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ s'annulant en a = 0 ,exprimer f en fonction g , en déduire la dérivabilité de f.

I.3 Donner le tableau de variation de f, puis faire l'étude aux bornes.

I.4 Donner l'allure de la courbe représentative de f.

II. Nous noterons $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction numérique de la variable réelle x, définie par

$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$

II.1 Montrer que pour tout entier naturel n ,il existe un polynôme de degré n noté P_n , tel que

$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{4}}}$

II.2.a. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.

II.2.b. En déduire que : $P_{n+1}(x)+(2n+1/2)xP_n(x)+n(n-1/2)(1+x^2)P_{n-1}(x)=0$.

(on pourra utiliser la formule de Leibniz).

II.2.c. En déduire que : $P_n'(x)=-n(n-1/2)P_{n-1}(x)$.

II.3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul P_n admet n racines réelles distinctes.

(on pourra utiliser le théorème de Rolle).

III. Soit (S_n) la suite numérique définie pour n entier naturel non nul par $S_n = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right) - 2\sqrt{n}$

III.1.a Trouver un équivalent de $S_n - S_{n-1}$ quand n tend vers $+\infty$.

III.1.b Etablir la convergence de cette suite.

(on pourra utiliser la théorie des séries).

III.2 En déduire un équivalent de $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ quand n tend vers $+\infty$.

III.3 Déterminer la nature des séries suivantes :

$\sum_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+2+\ldots+n}$, $\sum_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha}}$, (α est un réel.)

III.4. Quel est le rayon de convergence de $\sum_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-3} x^n$?

III.5. Montrer que cette série est convergente en -1.